19.03.20

Lezione 1 - Pt2

Richiami su v.a. Gaussiane (Pt2)

Momenti

- Sia $X \sim N(0,1)$, allora X ammette momento di ogni ordine e

$$\mathbb{E}[X^n] = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ è dispari} \\ (n-1)!! & \text{se } n \text{ è pari} \end{cases}$$

$$(n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (n-1)$$

Ad esempio $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X^3] = 0$
$\mathbb{E}[X^2] = 1$, $\mathbb{E}[X^4] = 3$

- La legge Gaussiana è determinata dai suoi momenti, ossia data $X \sim N(0,1)$ e Y v.a. che ammette momento di ogni ordine e t.c. $\mathbb{E}[Y^n] = \mathbb{E}[X^n]$ $\forall n \geq 1$ si ha $Y \sim N(0,1)$.

Commento (Problema dei momenti)

- $X \sim N(0,1)$, $Y = e^X$ (lognormale) allora $\mathbb{E}[Y^m] = e^{m^2/2} \quad \forall m \geq 1$

- Z v.a. discreta, $Z \in \{e^k, k \in \mathbb{Z}\}$
t.c. $\mathbb{P}(Z = e^k) = c\, e^{-k^2/2}, \quad k \in \mathbb{Z}$
allora $\mathbb{E}[Z^m] = e^{m^2/2} \quad \forall m \geq 1$

Y e Z sono due v.a. con stessi momenti ma legge diversa.

Teorema

Siano X e Y due v.a. reali con momento di ogni ordine e t.c.

$$\mathbb{E}[X^m] = \mathbb{E}[Y^m] \quad \forall m \geq 1$$

e $\exists\, M > 0,\ r > 0$ t.c.

$$\mathbb{E}[|X|^m] \leq \frac{M\, m!}{r^m} \quad \forall m \geq 1$$

allora X e Y hanno la stessa legge.

Cumulanti

Sia $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$, $X \in L^m(\Omega)$

Definizione (cumulante m-esimo di X)

$$K_m(X) := (-i)^m \frac{d^m}{dt^m} \log \varphi_X(t) \Big|_{t=0}$$

dove $\varphi_X(t) := \mathbb{E}[e^{itX}]$, $t \in \mathbb{R}$

Formula di Leonov & Shiryaev

$n \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$, $X \in L^n(\Omega)$. Si ha

$$\mathbb{E}[X^n] = \sum_{\substack{\pi = \{b_1, \dots, b_k\} \\ \in \mathcal{P}(\{1, \dots, n\})}} K_{|b_1|}(X) \cdots K_{|b_k|}(X)$$

$$K_n(X) = \sum_{\substack{\sigma = \{a_1, \dots, a_r\} \\ \in \mathcal{P}(\{1, \dots, n\})}} (-1)^{r-1} (r-1)! \, \mathbb{E}[X^{|a_1|}] \cdots \mathbb{E}[X^{|a_r|}]$$

dove $\mathcal{P}(\{1, \dots, n\})$ e' l'insieme delle partizioni di $\{1, \dots, n\}$ e $\pi = \{b_1, \dots, b_k\} \in \mathcal{P}(\{1, \dots, n\})$:

- $b_i \neq \emptyset$, $b_i \subseteq \{1, \dots, n\}$ $\forall i = 1, \dots, k$
- $\bigcup_{i=1}^{k} b_i = \{1, \dots, n\}$
- $|b_i| \equiv$ cardinalita' di b_i

Esempio

$K_1(X) = \mathbb{E}[X]$

$K_2(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \mathrm{Var}(X)$

$K_3(X) = \mathbb{E}[X^3] - 3\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[X^2] + 2\mathbb{E}[X]^3$

$$K_4(X) = \mathbb{E}[X^4] - 4\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[X^3] + \\ - 3\mathbb{E}[X^2]^2 + 12\mathbb{E}[X^2]\mathbb{E}[X]^2 \\ - 6\mathbb{E}[X]^4$$

In particolare, se $\mathbb{E}[X]=0$ si ha

$$k_3(X) = \mathbb{E}[X^3], \quad k_4(X) = \mathbb{E}[X^4] - 3\,\mathbb{E}[X^2]^2$$

Corollario $X \sim N(0,1) \iff$

$$K_n(X) = \begin{cases} 1 & \text{se } n=2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}, \quad n \geq 1$$

Metodo dei momenti / cumulanti

Teorema $X \sim N(0,1)$

$(X_n)_n$ successione di v.a.

supponiamo che $\forall m \in \mathbb{N}$ si ha

$$\circledast \quad \mathbb{E}[X_n^m] \xrightarrow[n \to +\infty]{} \mathbb{E}[X^m]$$

allora $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{d} X$

<u>Osservazione</u> $\circledast$ è equivalente a

$$K_m(X_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} K_m(X).$$

Presentazione I parte del corso

Approssimazione Gaussiana

Abbiamo $X \sim N(0,1)$, F una v.a. reale
Vogliamo studiare la "distanza" tra la legge μ_F di F e la legge Gaussiana μ_X

Siamo interessati al caso in cui F e' una funzione (suff. regolare) di X o più in generale un funzionale (suff. regolare) di un processo Gaussiano.

Ci sono varie metriche di probabilità!
Ad esempio la distanza di Kolmogorov

$$d_{Kol}(F,X) \left(= d_{Kol}(\mu_F,\mu_X)\right)$$

→ Wasserstein

→ Variaz totale

→ Fortet-Mourier

$$:= \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \mu_F((-\infty,x]) - \mu_X((-\infty,x]) \right|$$

Sono importanti in presenza di TLC.
Supponiamo di avere $(F_n)_n$ successione di v.a. che converge in legge a $X \sim N(0,1)$

allora $\quad d_{Kol}(F_n, X) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Siamo interessati a trovare una successione $(\phi(n))_n$ di numeri positivi t.c.

- $\phi(n) \to 0$, $n \to +\infty$
- $d_{Kol}(F_n, X) \le \phi(n)$

Infatti, "più $\phi(n)$ è piccolo, più è l'errore che commettiamo stimando la legge di F_n con la legge di X è piccolo".

Esempio $\quad F_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} X_i$ con X_i iid $\quad (*)$

$\mathbb{E}[X_1] = 0$

$Var(X_1) = 1$

$\Rightarrow$ TLC: $F_n \xrightarrow[n\to+\infty]{d} X \sim N(0,1)$

Teorema di Berry-Esseen

Sotto le ipotesi $(*)$ $+$ $\mathbb{E}[|X_1|^3] < +\infty$ si ha

$$d_{Kol}(F_n, X) \le C \, \frac{\mathbb{E}[|X_1|^3]}{\sqrt{n}}$$

dove $C > 0$ è una costante universale che non dipende da n né da $\{X_1, X_2, \dots\}$

Esseen (1956) $\quad C \geq \frac{\sqrt{10}+3}{6\sqrt{2\pi}} \simeq 0.40973$

Tyurin (2009) $\quad C \simeq 0.4785$

La dimostrazione del teorema di Berry-Esseen sarà un'applicazione del metodo di Stein per l'approssimazione normale in dim 1.

→ ci permette di stimare la distanza tra le leggi di due v.a. per mezzo di operatori differenziali.

I lezione

- Metriche di probabilità
- Metodo di Stein
- Applicazione:
  - dim B-E
  - dim alternativa di un risultato di Salem e Zygmund per polinomi trigonometrici aleatori

(dim 1)

II lezione : · Operatori di Malliavin

· Applicazione · Hermite (proprietà)

· disuguaglianze di Poincaré

stima di $d(X, f(X))$ in termini di $\mathbb{E}[f'(X)^4]$ e $\mathbb{E}[f''(X)^4]$

III & IV lezione

· Operatori di Malliavin

· Processi isonormali e chaos di Wiener

· Integrali multipli di Wiener - Ito

V lezione

· Approssimazione normale nel chaos di Wiener

· dim teorema del momento quarto (Nualart - Peccati, Nourdin - Peccati)

in un chaos fissato per dimostrare un TLC è necessario e sufficiente per vedere che il momento quarto converga a 3 (equiv. cumulante quarto tende a 0).

· Applicazione: TLC per zeri di polinomi aleatori trigonometrici